

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Bài 1. (4 điểm)

Giải phương trình: $4^{\log_{2020} x} + \log_2(-2 + x^{\log_{2020} 4}) = 2^{\log_{2020} x} + \log_{2020} x + 2$

Bài 2. (4 điểm)

Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi d là đường thẳng đi động đi qua điểm $I(1;1)$ và cắt (C) tại hai điểm M, N . Tính khoảng cách từ điểm $A(2;-3)$ đến d khi tam giác AMN có diện tích nhỏ nhất.

Bài 3. (4 điểm)

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ A' đến BB' và CC' lần lượt bằng $\sqrt{3}$ và 2, góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và $(ACC'A')$ bằng 60° . Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = \sqrt{13}$.

a) Tính khoảng cách từ M đến AA' .

b) Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Bài 4. (4 điểm)

Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - mx$ và $g(x) = \frac{x-m}{x-1}$, tham số $m \neq 1$, có đồ thị $(C_1), (C_2)$. Biết rằng tồn tại đúng 2 số $x_0 \in (2;3)$ sao cho nếu gọi d_1, d_2 là tiếp tuyến tại các điểm có hoành độ x_0 thuộc $(C_1), (C_2)$ và d_1, d_2 cắt nhau ở A , còn d_1, d_2 cắt trục Ox ở B, C thì $AB = AC$. Tìm tất cả các giá trị m .

Bài 5. (4 điểm)

Cho tập hợp $X = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -5 \leq x \leq 5, x \neq 0\}$. Chọn ngẫu nhiên 4 số đôi một phân biệt $a, b, c, d \in X$. Tính xác suất để hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $ad \neq bc$, có đồ thị (C) mà cả (C) lẫn tiệm cận đứng của (C) đều cắt trục Ox theo chiều dương.

HẾT

ĐÁP ÁN

Bài 1. (4 điểm)

Giải phương trình: $4^{\log_{2020} x} + \log_2(-2 + x^{\log_{2020} 4}) = 2^{\log_{2020} x} + \log_{2020} x + 2$ (*)

Giải. Điều kiện : $x > 0 \wedge \log_{2020} x > \frac{1}{2}$

$$(*) \Leftrightarrow -2 + 4^{\log_{2020} x} + \log_2(-2 + 4^{\log_{2020} x}) = 2^{\log_{2020} x} + \log_2(2^{\log_{2020} x})$$

$$\Leftrightarrow f(-2 + 4^{\log_{2020} x}) = f(2^{\log_{2020} x}) \text{ với } f(t) = t + \log_2 t \quad (t > 0)$$

Do f là hàm đồng biến nên ta suy ra $-2 + 4^{\log_{2020} x} = 2^{\log_{2020} x}$

$$\Leftrightarrow 2^{\log_{2020} x} = 2 \Leftrightarrow \log_{2020} x = 1 \Leftrightarrow x = 2020$$

Bài 2. (4 điểm)

Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi d là đường thẳng đi động đi qua điểm $I(1;1)$ và cắt (C) tại hai điểm M, N . Tính khoảng cách từ điểm $A(2; -3)$ đến d khi tam giác AMN có diện tích nhỏ nhất.

Giải.

Phương trình đường thẳng $d: y = k(x-1) + 1$

Hoành độ của M, N là nghiệm của phương trình: $\frac{x+2}{x-1} = k(x-1) + 1$ (*)

$$(*) \Leftrightarrow k(x-1)^2 = 3 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{\frac{3}{k}} \text{ với } k > 0$$

$$\text{Từ đó: } M\left(1 + \sqrt{\frac{3}{k}}; k\sqrt{\frac{3}{k}} + 1\right) \text{ và } N\left(1 - \sqrt{\frac{3}{k}}; -k\sqrt{\frac{3}{k}} + 1\right)$$

$$\overrightarrow{AM} = \left(\sqrt{\frac{3}{k}} - 1; k\sqrt{\frac{3}{k}} + 4\right) \text{ và } \overrightarrow{AN} = \left(-\sqrt{\frac{3}{k}} - 1; -k\sqrt{\frac{3}{k}} + 4\right)$$

$$S_{AMN} = \frac{1}{2} \cdot \left| \left(\sqrt{\frac{3}{k}} - 1\right) \left(-k\sqrt{\frac{3}{k}} + 4\right) - \left(-\sqrt{\frac{3}{k}} - 1\right) \left(k\sqrt{\frac{3}{k}} + 4\right) \right| = (k+4)\sqrt{\frac{3}{k}} \geq 2\sqrt{4k} \cdot \sqrt{\frac{3}{k}} = 4\sqrt{3}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow k = 4$

$$\text{Khi đó phương trình của } d: y = 4x - 3 \text{ và } d(A, d) = \frac{|4 \cdot 2 - (-3) - 3|}{\sqrt{17}} = \frac{8}{\sqrt{17}}.$$

Cách khác:

Với $k > 0$, ta có x_M, x_N là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2x + 1 - \frac{3}{k} = 0$

Suy ra

$$\begin{aligned} MN &= \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2} = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + k^2(x_M - x_N)^2} = \sqrt{(1 + k^2)(x_M - x_N)^2} \\ &= \sqrt{(1 + k^2)[(x_M + x_N)^2 - 4x_M x_N]} = \sqrt{(1 + k^2)\left[4 - 4\left(1 - \frac{3}{k}\right)\right]} = 2\sqrt{(1 + k^2) \cdot \frac{3}{k}} \end{aligned}$$

Phương trình đường thẳng $d: kx - y - k + 1 = 0 \Rightarrow d(A; d) = \frac{|k + 4|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{k + 4}{\sqrt{k^2 + 1}}$

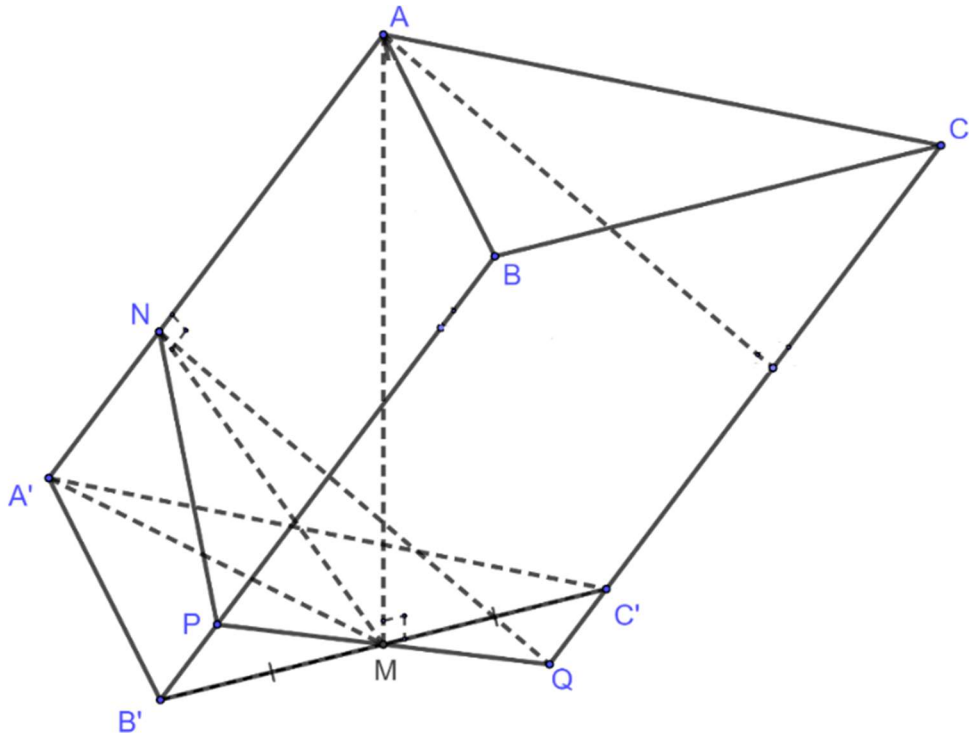
$$S_{AMN} = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot d(A; d) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{(1 + k^2) \cdot \frac{3}{k}} \cdot \frac{k + 4}{\sqrt{k^2 + 1}} = (k + 4)\sqrt{\frac{3}{k}} \geq 2\sqrt{4k} \cdot \sqrt{\frac{3}{k}} = 4\sqrt{3}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow k = 4$ và $d(A; d) = \frac{8}{\sqrt{17}}$

Bài 3. (4 điểm)

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ A' đến BB' và CC' lần lượt bằng $\sqrt{3}$ và 2, góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và $(ACC'A')$ bằng 60° . Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = \sqrt{13}$.

Giải.



a) Tính khoảng cách từ M đến AA'

Qua M dựng mặt phẳng vuông góc với các cạnh của lăng trụ, cắt các cạnh bên AA', BB', CC' lần lượt tại N, P, Q .

Theo giả thiết ta có: $NP = \sqrt{3}, NQ = 2$ và $\widehat{NQP} = \widehat{(ACC'A'), (BCC'B')} = 60^\circ$.

Gọi N' là hình chiếu của N lên $PQ \Rightarrow NN' = NQ \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$ nên N' trùng P

$\Rightarrow$ tam giác NPQ vuông tại P và $PQ = 1$.

Mặt khác, do $BB' \parallel CC'$ và M là trung điểm của $B'C'$ nên M cũng là trung điểm của PQ .

$\Rightarrow MN = \sqrt{NP^2 + MP^2} = \sqrt{3 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$ hay khoảng cách từ M đến AA' bằng $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

b) Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Ta có $A'N = \sqrt{A'M^2 - MN^2} = \sqrt{13 - \frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{39}}{2} \Rightarrow AA' = \frac{A'M^2}{A'N} = \frac{13 \cdot 2}{\sqrt{39}} = \frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$

Ta lại có $AA' \perp (NPQ), AM \perp (A'B'C') \Rightarrow \widehat{(NPQ), (A'B'C')} = \widehat{A'AM}$

$$\begin{aligned} V_{ABC.A'B'C'} &= S_{A'B'C'} \cdot AM = \frac{S_{NPQ}}{\cos \widehat{A'AM}} \cdot AA' \cdot \cos \widehat{A'AM} = S_{NPQ} \cdot AA' \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}} = \sqrt{13} \end{aligned}$$

Bài 4. (4 điểm)

Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - mx$ và $g(x) = \frac{x-m}{x-1}$, tham số $m \neq 1$, có đồ thị $(C_1), (C_2)$.

Biết rằng tồn tại đúng 2 số $x_0 \in (2; 3)$ sao cho nếu gọi d_1, d_2 là tiếp tuyến tại các điểm có hoành độ x_0 thuộc $(C_1), (C_2)$ và d_1, d_2 cắt nhau ở A , còn d_1, d_2 cắt trục Ox ở B, C thì $AB = AC$. Tìm tất cả các giá trị m .

Giải.

Ta biết rằng hệ số góc của AB, AC lần lượt là $f'(x_0), g'(x_0)$.

$\triangle ABC$ cân tại $A \Leftrightarrow f'(x_0) = -g'(x_0)$.

Ta đưa về bài toán tìm m để phương trình trên có 2 nghiệm phân biệt trên khoảng $(2; 3)$.

Ta có $f'(x) = x - m$ và $g'(x) = \frac{m-1}{(x-1)^2}$ nên ta có phương trình

$$m - x_0 = \frac{m-1}{(x_0-1)^2} \Leftrightarrow m(x_0^2 - 2x_0) = x_0(x_0 - 1)^2 - 1 \Leftrightarrow m = x_0 + \frac{x_0 - 1}{x_0^2 - 2x_0}.$$

Xét hàm số $h(t) = t + \frac{t-1}{t^2-2t}$ với $t \in (2;3)$. Ta có

$$h'(t) = 1 - \frac{t^2 - 2t + 2}{t^2(t-2)^2} = \frac{(t-1)^2(t^2 - 2t - 2)}{t^2(t-2)^2}.$$

Suy ra $h'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 + \sqrt{3} \in (2;3)$

$$h(1 + \sqrt{3}) = 1 + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2 - 1} = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}; \quad h(3) = 3 + \frac{2}{9-6} = \frac{11}{3}$$

x	2	$1 + \sqrt{3}$	3
$h'(t)$	-	0	+
$h(t)$	$+\infty$	$1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{11}{3}$

Từ bảng biến thiên, ta thấy tất cả các giá trị cần tìm của m là $1 + \frac{3\sqrt{3}}{2} < m < \frac{11}{3}$.

Bài 5. (4 điểm)

Cho tập hợp $X = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -5 \leq x \leq 5, x \neq 0\}$. Chọn ngẫu nhiên 4 số đôi một phân biệt

$a, b, c, d \in X$. Tính xác suất để hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $ad \neq bc$, có đồ thị (C) mà cả (C) lẫn tiệm cận đứng của (C) đều cắt trục Ox theo chiều dương.

Giải.

$$a, b, c, d \in X = \{-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5\} \text{ và } ad \neq bc.$$

Không gian mẫu là số chỉnh hợp chập 4 của 10 và là $n(\Omega) = A_{10}^4$. Để đồ thị (C) và tiệm cận đứng của nó cắt tia Ox theo chiều dương thì $ab < 0$ và $cd < 0$. (*)

Số bộ (a, b) mà $ab < 0$ là $10 \cdot 5 = 50$ (do có 10 cách chọn a và 5 cách chọn b).

Khi đó, ta sẽ có $8 \cdot 4 = 32$ cách chọn cặp (c, d) (do có 8 cách chọn c và 4 cách chọn d).

Do đó có $50 \cdot 32 = 1600$ cách chọn bộ a, b, c, d thỏa mãn (*).

Để đếm số bộ A thỏa mãn đề bài, ta xét trước các bộ không thỏa, tức là $ad = bc$:

+ Trường hợp $\frac{a}{b} = -1$: có 10 cách chọn a , 1 cách chọn b , 8 cách chọn c , 1 cách chọn d .

Như vậy sẽ có $10 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 1 = 80$ cách chọn bộ (a, b, c, d) .

+ Trường hợp $\frac{a}{b} = -2$: có 4 cách chọn a ($\pm 4, \pm 2$), 1 cách chọn b , 2 cách chọn c , 1 cách chọn d . Như vậy sẽ có $4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 8$ cách chọn bộ (a, b, c, d) .

+ Trường hợp $\frac{a}{b} = -\frac{1}{2}$: có 4 cách chọn b ($\pm 4, \pm 2$), 1 cách chọn a , 2 cách chọn c , 1 cách chọn d . Như vậy sẽ có $4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 8$ cách chọn bộ (a, b, c, d) .

+ Trường hợp $\frac{a}{b} \notin \left\{-\frac{1}{2}, -1, -2\right\}$: có $50 - (10 + 4 + 4) = 32$ cách chọn cặp (a, b) và tương ứng

sẽ duy nhất một cách chọn cặp $(c, d) = (-a, -b)$.

Do đó, $n(A) = 1600 - (80 + 8 + 8 + 32) = 1472$. Xác suất cần tìm là

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1472}{A_{10}^4} = \frac{2^6 \cdot 23}{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{2^6 \cdot 23}{2^4 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 5} = \frac{4 \cdot 23}{63 \cdot 5} = \frac{92}{315}.$$